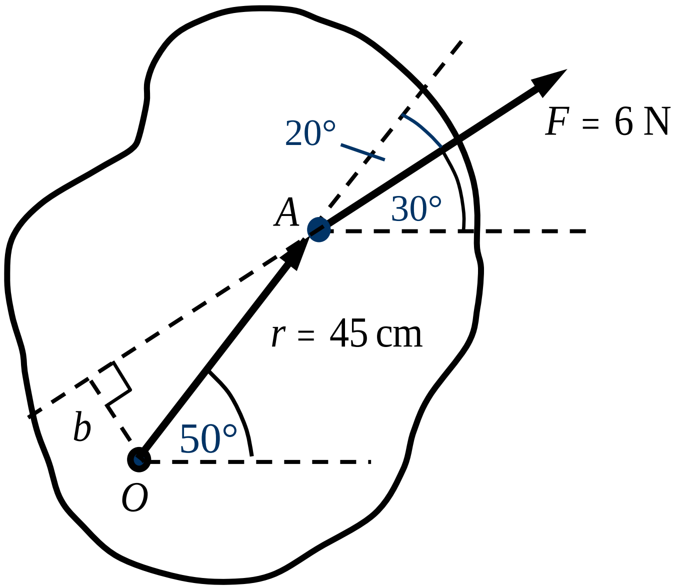
Physik I

Kräfte Teil 2

Moment einer Kraft

Möglichkeiten der Berechnung

1. Mit Hilfe des Hebelarms



a) Hebelarm berechnen

$$b = r \sin 20° = (0{,}45\ \mathrm{m})\,(0{,}342) = 0{,}154\ \mathrm{m}$$

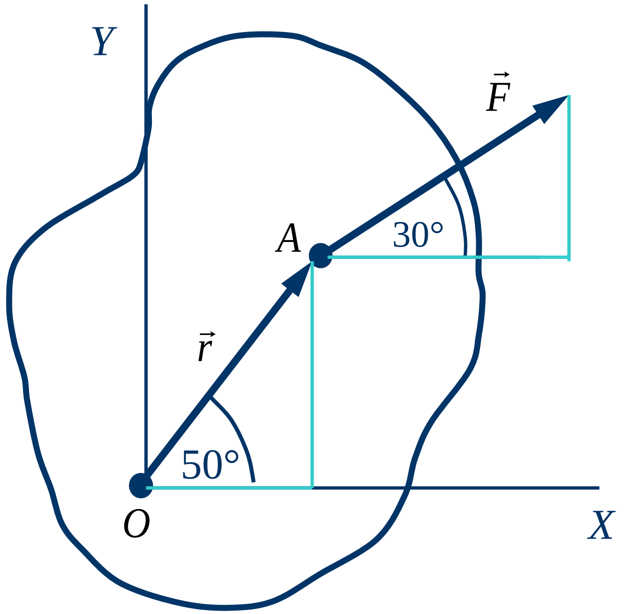
b) Drehmoment berechnen

$$\tau = Fb = (6\ \mathrm{N})\,(0{,}154\ \mathrm{m}) = 0{,}924\ \mathrm{Nm}$$

Da die Drehung in Uhrzeigersinn erfolgt, muss das Ergebnis -0,924 Nm heißen

Moment einer Kraft

2. Unter Verwendung von $\tau = xF_y - yF_x$



$x = r\cos 50° \quad = (0{,}45\text{ m})\,(0{,}543) = 0{,}289\text{ m}$

$y = r\sin 50° \quad = (0{,}45\text{ m})\,(0{,}766) = 0{,}345\text{ m}$

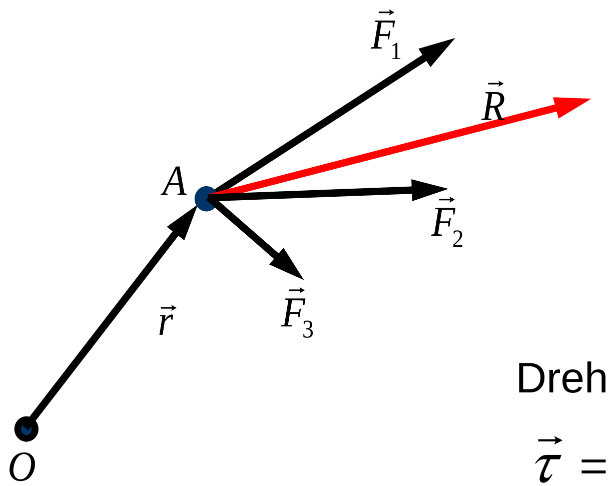
$F_x = F\cos 30° \quad = (6\text{ N})\,(0.866) = 5{,}196\text{ N}$

$F_y = F\sin 30° \quad = (6\text{ N})\,(0.500) = 3{,}000\text{ N}$

$$\tau = xF_y - yF_x \quad = (0{,}289)\,(3{,}000\text{ N}) - (0{,}345)\,(5{,}196\text{ N}) = \underline{\underline{-0{,}924\text{ N}}}$$

Moment mehrerer Kräfte

Mehrere Kräfte greifen an einem Punkt an



Resultierende Kraft

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Drehmoment

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$$

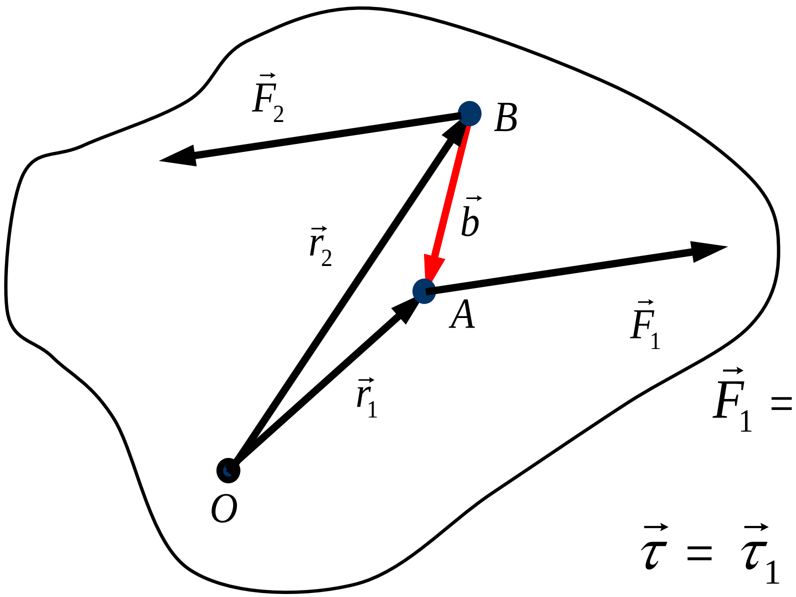
$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots)$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \vec{r} \times \vec{F}_3 + \ldots$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \ldots = \sum \vec{\tau}_i$$

Moment mehrerer Kräfte

Mehrere Kräfte greifen an verschiedenen Punkten an



Resultierende Kraft

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

Drehmoment

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad \Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad \Longrightarrow$$ keine Translation

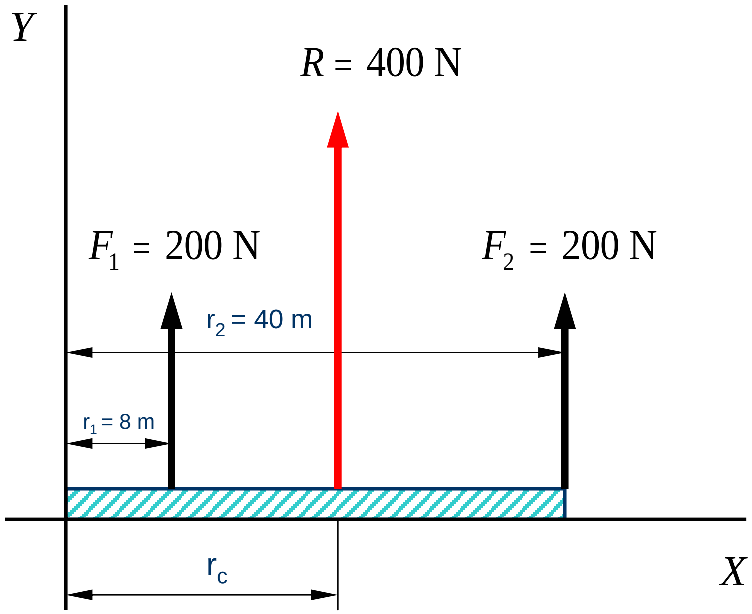
$$\begin{aligned} \vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \quad &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \\ &= \vec{b} \times \vec{F}_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} \neq 0 \quad \Longrightarrow$$ Rotation

Zusammensetzung mehrere Kräfte

Parallele Kräfte

Gesucht ist der Angriffspunkt der Resultierenden



$$R = F_1 + F_2 = \sum_i F_i$$

$$= 200\text{ N} + 200\text{ N}$$

$$R = 400\text{ N}$$

$$r_c = \frac{r_1 F_1 + r_2 F_2}{F_1 + F_2}$$

$$= \frac{(8\text{ m})(200\text{ N}) + (40\text{ m})(200\text{ N})}{200\text{ N} + 200\text{ N}}$$

$$\underline{\underline{r_c = 24\text{ m}}}$$

Günther Michaelis

Zusammensetzung mehrere Kräfte

Kräfte parallel zum Einheitsvektor $\boldsymbol{u}$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F} =_i \sum_i \vec{u} F_i = \vec{u}\left(\sum_i F_i\right)$$

Betrag der Resultierenden

$$R = \sum_i F_i$$

Die resultierende Kraft greift in einem *Mittelpunkt paralleler Kräfte* an. Der Punkt wird durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_c$ beschrieben

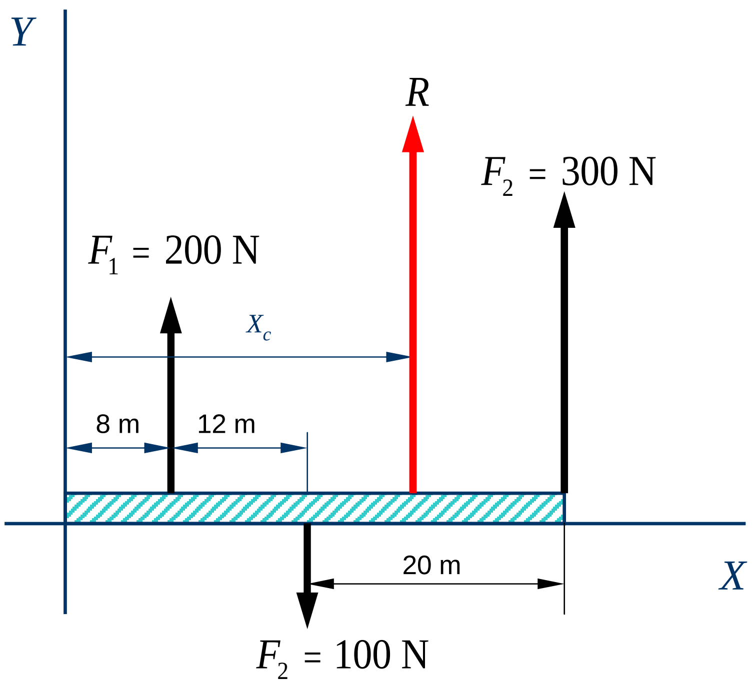
$$r_c = \frac{\sum_i \vec{r}_i F_i}{\sum_i F_i} = \frac{\vec{r}_1 F_1 + \vec{r}_2 F_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots}$$

Zerlegung in die Komponenten

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i} \quad y_c = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \quad z_c = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i}$$

Zusammensetzung mehrere Kräfte

Beispiel



$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$= 200\text{ N} - 100\text{ N} + 300\text{ N} = \underline{\underline{400\text{ N}}}$$

Alle Kräfte wirken auf Punkte, die auf einer Geraden liegen, d.h. es muss nur die x-Koordinate berücksichtigt werden.

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}$$

$$x_c = \frac{(200\text{ N})(8\text{ m}) - (100\text{ N})(20\text{ m}) + (300\text{ N})(40\text{ m})}{400\text{ N}}$$

$$\underline{\underline{x_c = 29\text{ m}}}$$

Schwerpunkt

Schwerpunkt eines Körpers

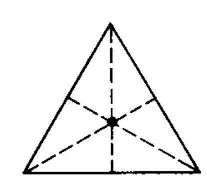
Der Schwerpunkt eines Körpers wird auch als Massenmittelpunkt bezeichnet.

Im Schwerpunkt kann man sich im Sinne der klassischen Mechanik die gesamte Masse des Körpers vereint denken.
[Enzyklopädie: Schwerpunkt. DB Sonderband: Wikipedia Herbst 2004, S. 254732]

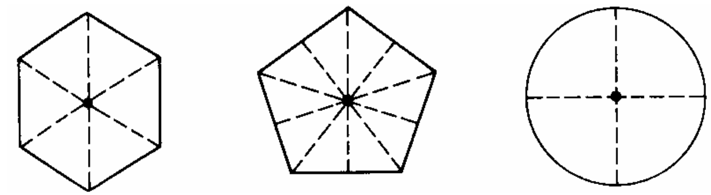
Flugbahn eines nach oben geworfenen Baseball-schlägers: Der Schläger rotiert um seinen Schwerpunkt. Der Schwerpunkt beschreibt eine Parabel, alle anderen Punkte bewege sich auf komplizierteren Bahnkurven.

Quelle: Halliday, Resnick. Walker; Physik. Wiley-VCH 2003

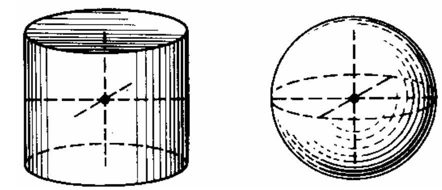
Schwerpunkte



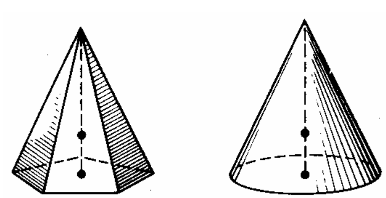
Dreieck
Schnittpunkt der
3 Schwerelinien



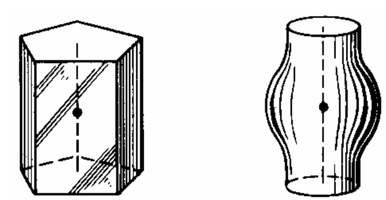
Regelmäßiges Vieleck bzw. Kreis
Geometrisches Zentrum



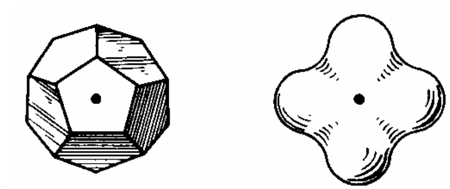
Zylinder, Kugel
Geometrisches Zentrum



Pyramide, Kegel. Auf der Linie Spitze – Mittelpunkt der Basis



Figur mit axialer Symmetrie: Ein Punkt auf der Symmetrieachse



Figur mit Symmetriezentrum: Im Symmetriezentrum

Nach Alonso/Finn, Physik, Addison-Wesley 1977

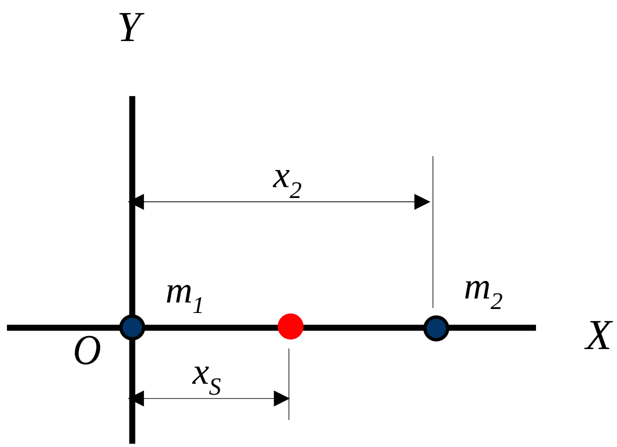
Schwerpunkt

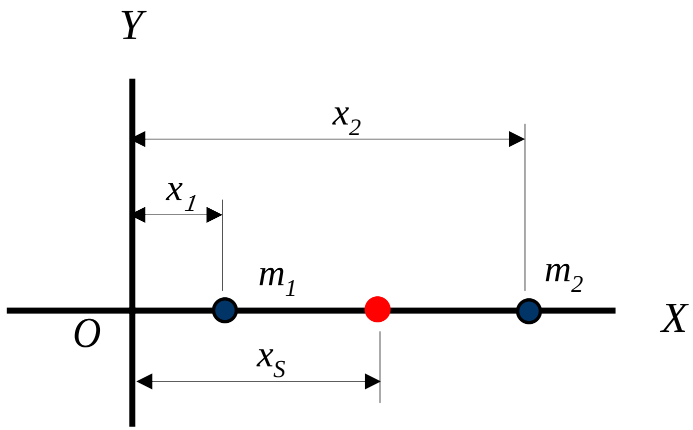
Die Koordinaten des Schwerpunktes (oder Massenmittelpunktes) x_S ist definiert durch:

$$m_{ges}\, x_s = m_1\, x_1 + m_1\, x_2$$

$$\text{mit } m_{ges} = m_1 + m_2 = \text{Gesamtmasse des Systems}$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{m_1\, x_1 + m_1\, x_2}{m_{ges}}$$





Günther Michaelis

Schwerpunkt

System mit mehreren Teilchen

Die x, y, und z-Komponenten des Ortsvektors:

$$x_s = \frac{\sum_i x_i \, m_i}{\sum_i m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_i y_i \, m_i}{\sum_i m_i}, \quad z_s = \frac{\sum_i z_i \, m_i}{\sum_i m_i}$$

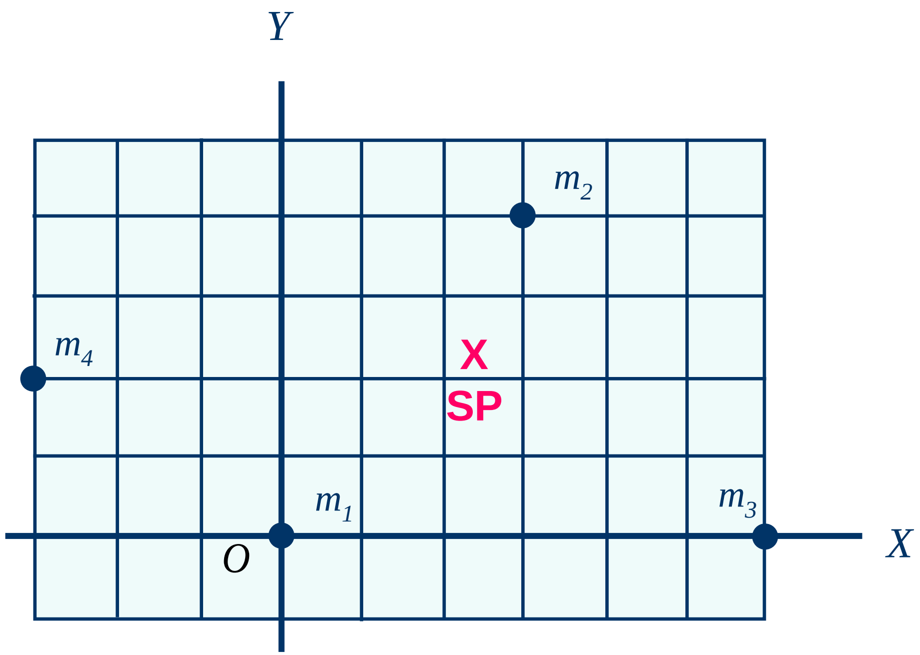
Analog zum Mittelpunkt paralleler Kräfte ist der Ortsvektor des Schwerpunktes bestimmt durch

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i \vec{r}_i \, m_i \, g}{\sum_i m_i \, g} = \frac{\sum_i \vec{r}_i \, m_i}{\sum_i m_i} = \frac{\vec{r}_1 \, m_1 + \vec{r}_2 \, m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

Schwerpunkt

Beispiel

Der Massenmittelpunkt der Teilchen, die wie folgt angeordnet sind, soll ermittelt werden



$m_1 = 5\ kg \qquad m_2 = 30\ kg$

$m_3 = 20\ kg \qquad m_4 = 15\ kg$

1. Schritt: Gesamtmasse bestimmen

$$m = \sum_i m_i$$

2. Schritt: x_c und y_c berechnen

$$x_c = \frac{\sum_i x_i\, m_i}{\sum_i m_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_i y_i\, m_i}{\sum_i m_i},$$

Aktionsprinzip

Zweites newtonsche Gesetz

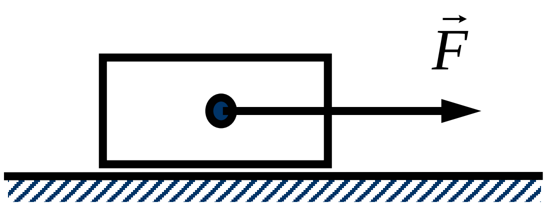
Die auf einen Körper wirkende Gesamtkraft ist gleich dem Produkt der Masse und der Beschleunigung des Körpers.

$$\vec{F}_{ges} = m\vec{a} \quad \text{Kraft und Beschleunigung sind parallel}$$

$$\text{mit } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}_{ges} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Beispiel



Gegeben: *F*= 4,0 N, *m*=0,2 kg
Gesucht: Beschleunigung
Lösung:

$$F = m\,a, \quad a = \frac{F}{m} = \frac{4{,}9\ \text{N}}{0{,}2\ \text{kg}} = \underline{\underline{20\ \text{m}\,\text{s}^{-2}}}$$

Gravitationskraft

Auf ein Körper, der sich im freien Fall befindet, wirkt nur die Gravitationskraft $\vec{F}_g$ (wenn der Luftwiderstand des Körpers vernachlässigt wird)

$$\vec{F}_g = m\,\vec{g}$$

$$\vec{F}_g = -F_g\,\vec{e}_y = -m\,g\,\vec{e}_y$$

$\vec{e}_y$: Einheitsvektor entlang der y-Achse, die vom Erdboden aus senkrecht nach oben zeigt.

$\vec{g}$: Die nach unten gerichtete Gravitationsbeschleunigung.

Erdbeschleunigung

Breiten- und Höhenabhängigkeit der Erdbeschleunigung

Die Erdbeschleunigung *g* setzt sich zusammen aus der Schwerebeschleunigung und der Beschleunigung durch die Fliehkraft. Damit ist sie sowohl breiten- als auch höhenabhängig.

φ (Grad nördl. Breite)	0	30	50	70	90
z = 0m	9.780	9.793	9.811	9.826	9.832
z = 10 km	9.750	9.763	9.780	9.795	9.801
z = 50 km	9.627	9.640	9.657	9.672	9.678

Quelle: http://www.uni-leipzig.de/~jacobi/vor_ein/g_von_phi.html

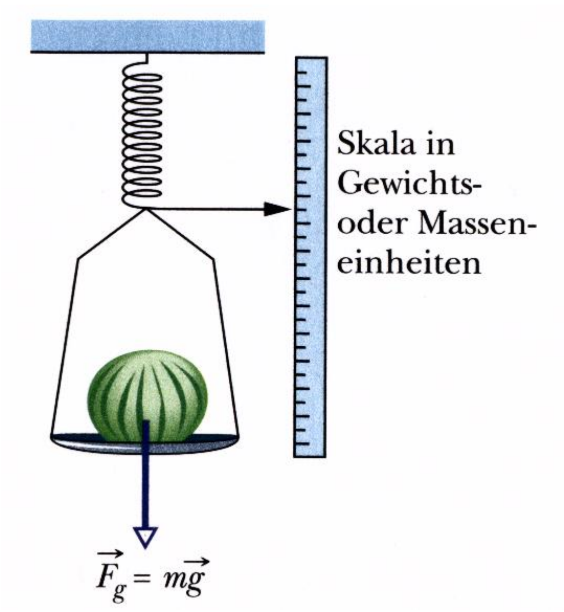
Gewichtskraft

Die Gewichtskraft ist die Kraft, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird. Sie ergibt sich aus dem Produkt der Masse mit der Schwerebeschleunigung

$$W = m\,g$$

Die SI-Einheit des Gewichts ist das Newton (N).

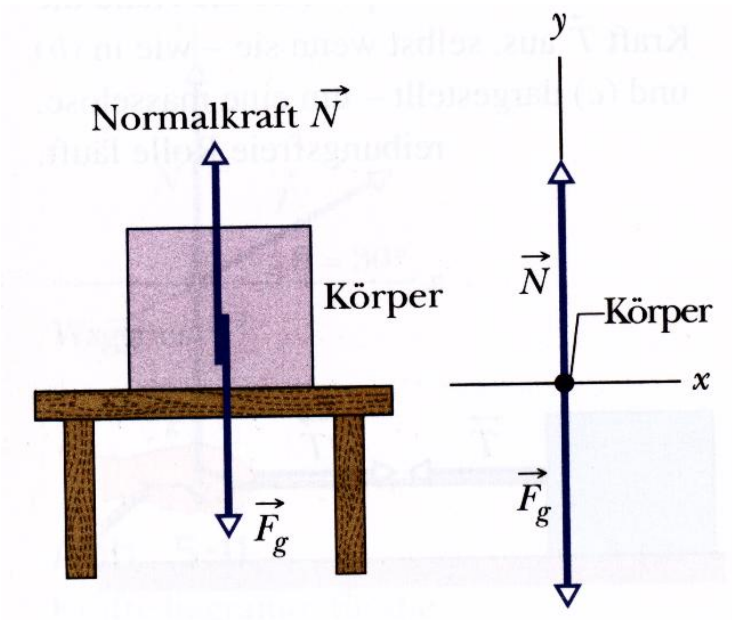
Die Gewichtskraft wirkt in Richtung der Erdbeschleunigung



Federwaage: Der angezeigte Wert ist proportional zum Gewicht des Gegenstandes in der Waagschale

Quelle: Halliday, Resnick. Walker; Physik. Wiley-VCH 2003

Normalkraft

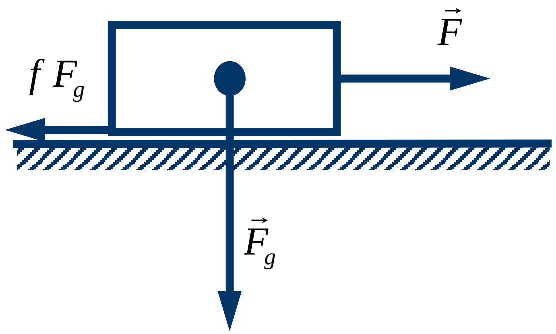


Ein Körper ruht auf einem Tisch: Der Tisch übt eine sogenannte Normalkraft auf den Körper aus. Sie verläuft senkrecht zur Oberfläche des Tisches

$$N = m\,g$$

Quelle: Halliday, Resnick. Walker; Physik. Wiley-VCH 2003

Reibungskraft



Die Reibungskraft wirkt zwischen den Oberflächen zweier, sich berührender Körper

Sie wirkt stets parallel zur Berührungsfläche und ist der Bewegung entgegengerichtet.

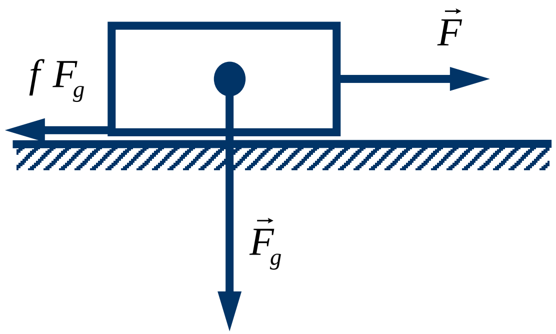
Die experimentelle Bestimmung zeigt, dass:

$$F_f \sim F_g$$

$$F_f = f\,F_g; \quad f: \text{Reibungskoeffizient}$$

Reibungskraft

Beispiel



Gesucht: Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$**,** die erforderlich ist, um einen Körper mit einer bestimmten Beschleunigung über die Oberfläche zu schieben.

Die resultierende Kraft ist die Differenz aus der angreifenden Kraft ***F*** und der Reibungskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{f}}$

$$F_R = F - F_f$$

$$F_R = F - f\,F_g = ma$$

$$\text{mit } F_g = mg$$

$$F - f\,mg = ma$$

$$F = ma + f\,mg$$

$$F = m(a + fg)$$

Reibungskraft

Minimale Kraft

$$F = m(a + fg)$$

$$\text{mit } a = 0$$

$$F = m\,f\,g$$

$$\text{mit } m\,g = F_g$$

$$\boxed{F = f\,F_g}$$

$F = f\,F_g$ ist die minimale Kraft, die erforderlich ist, um einen Körper zu bewegen. Sie ist gleich der Reibungskraft

Reibungskraft

Aufgabe

Ein Körper mit einer Masse von 0,08 kg befindet sich auf einer um 30° geneigten Ebene. Welche Kraft muss ausgeübt werden, damit er nach oben gleitet. Der Koeffizient der Gleitreibung mit der Ebene ist 0,30.